

## MATEMATIKA 2

### Lekcija 7- Lokalni ekstremi funkcije dveju nezavisno promenljivih

Lokalni ekstremi funkcije dveju nezavisno promenljivih definišu se na isti način kao lokalni ekstremi funkcije jedne nezavisno promenljive. Kažemo da funkcija  $z = f(x, y)$  definisana na skupu  $D$  ima u tački  $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$  lokalni minimum (maksimum) ako postoji okolina  $U \subset D$  te tačke takva da je razlika  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  nenegativna (nepozitivna) za svako  $(x, y) \in U$ . Lokalni minimumi i lokalni maksimumi zajedno se nazivaju lokalnim ekstremima. Isto kao kod funkcija jedne nezavisno promenljive govori se o strogim i nestrogim lokalnim ekstremima.

Razlika  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  je totalni priraštaj funkcije  $z$  u tački  $(x_0, y_0)$  pri priraštajima  $\Delta x$  i  $\Delta y$  nezavisno promenljivih, koji smo ranije zapisivali kao

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Navodimo teoremu o neophodnom uslovu lokalnog ekstremuma funkcije dveju nezavisno promenljivih.

**Teorema 1.** Ako funkcija  $z = f(x, y)$  ima lokalni ekstremum u tački  $M_0(x_0, y_0)$  onda su u toj tački parcijalni izvodi  $\frac{\partial z}{\partial x}$  i  $\frac{\partial z}{\partial y}$  jednaki nuli, ukoliko postoje.

**Dokaz.** Ako u funkciji  $z$  uzmemo  $y = y_0$  dobijemo funkciju  $z = f(x, y_0)$  jedne nezavisno promenljive, koja očigledno u tački  $x = x_0$  ima lokalni ekstremum. Prema Fermaovoj teoremi mora biti  $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 0$ . Na isti način se zaključuje i o parcijalnom izvodu  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

Tačke u kojima su parcijalni izvodi  $\frac{\partial z}{\partial x}$  i  $\frac{\partial z}{\partial y}$  jednaki nuli ili ne postoje zovu se kritične tačke, a tačke u kojima su parcijalni izvodi  $\frac{\partial z}{\partial x}$  i  $\frac{\partial z}{\partial y}$  jednaki nuli zovu se stacionarne tačke. Naravno, ako je neka tačka stacionarna ili kritična, funkcija u njoj ne mora imati lokalni ekstremum.

Dajemo teoremu o dovoljnom uslovu egzistencije lokalnog ekstremuma.

**Teorema 2.** Neka je  $M_0(x_0, y_0)$  stacionarna tačka dvaput neprekidno diferencijabilne funkcije  $z = f(x, y)$ . Tada funkcija  $f(x, y)$  u tački  $M_0(x_0, y_0)$  ima strogi lokalni maksimum (minimum) ako je totalni diferencijal  $d^2 f(M_0)$  negativan (pozitivan), a nema lokalni ekstremum u toj tački ako  $d^2 f(M_0)$  nema stalan znak za sve  $dx$  i  $dy$ . (Dokaz — na vežbama AG.)

**Napomena.** Ako je:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \quad \text{i} \quad \Delta = B^2 - AC, \end{aligned}$$

tada:

1<sup>0</sup> ako je  $\Delta < 0$  i  $A > 0$  funkcija  $f$  ima lokalni minimum u tački  $(x_0, y_0)$ ;

2<sup>0</sup> ako je  $\Delta < 0$  i  $A < 0$  funkcija  $f$  ima lokalni maksimum u tački  $(x_0, y_0)$ ;

3<sup>0</sup> ako je  $\Delta > 0$  funkcija  $f$  nema lokalni ekstremum u tački  $(x_0, y_0)$ .

**Primer 1.** Odredimo lokalne ekstreme funkcija:

**a)**  $z = 2y - x^2 - y^2$ ; **b)**  $z = x^2 - 2x + y^2$ ; **c)**  $z = 2xy - 4x - 2y$ ;

**d)**  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ ; **e)**  $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ .

**Rešenje.** Napomenimo da su sve funkcije u ovom zadatku definisane u svakoj tački  $xy$  - ravni i imaju neprekidne parcijalne izvode svakog reda. Dakle, tačke u kojima one mogu da imaju lokalne ekstreme su samo stacionarne tačke, tj. rešenja sistema jednačina:

$$z'_x = 0 \wedge z'_y = 0.$$

**a)**

$$(z'_x = -2x = 0 \wedge z'_y = 2 - 2y = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 1).$$

Dakle, tačka  $(0, 1)$  je jedina tačka mogućeg ekstremuma. Kako je

$$A = z''_{xx} = -2, \quad B = z''_{xy} = 0, \quad C = z''_{yy} = -2,$$

to je

$$\Delta = B^2 - AC = 0^2 - (-2)(-2) = -4 < 0.$$

Znači, funkcija ima lokalni maksimum u tački  $(0, 1)$  (jer je  $A < 0$ ), i on iznosi  $z_{\max} = z(0, 1) = 1$ .

**b)**

$$(z'_x = 2x - 2 = 0 \wedge z'_y = 2y = 0) \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 0).$$

Tačka  $(1, 0)$  je jedina tačka mogućeg ekstremuma. Dalje je

$$A = z''_{xx} = 2, \quad B = z''_{xy} = 0, \quad C = z''_{yy} = 2,$$

$$\Delta = B^2 - AC = 0 - 4 < 0.$$

Funkcija ima lokalni minimum u tački  $(1, 0)$ , jer je  $A = C = 2 > 0$ . Ovaj lokalni minimum iznosi

$$z_{\min} = z(1, 0) = -1.$$

c)

$$(z'_x = 2y - 4 = 0 \wedge z'_y = 2x - 2 = 0) \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 2).$$

Tačka  $(1, 2)$  je stacionarna. Zatim nalazimo

$$A = z''_{xx} = 0, \quad B = z''_{xy} = 2, \quad C = z''_{yy} = 0.$$

Odatle je

$$\Delta = B^2 - AC = 4 > 0,$$

što znači da funkcija u toj tački nema lokalni ekstremum.

d)

$$(z'_x = 3x^2 - 6y = 0 \wedge z'_y = 24y^2 - 6x = 0) \Leftrightarrow (x^2 - 2y = 0 \wedge 4y^2 - x = 0).$$

Poslednji sistem ima za rešenja tačke  $M_1(0, 0)$  i  $M_2(1, \frac{1}{2})$ . Računamo parcijalne izvode drugog reda:

$$A = z''_{xx} = 6x, \quad B = z''_{xy} = -6, \quad C = 48y.$$

Kako je  $\Delta(M_1) = 36 > 0$ , to u tački  $M_1(0, 0)$  funkcija nema lokalni ekstremum. Pošto je  $\Delta(M_2) = (-6)^2 - 6 \cdot 1 \cdot 48 \cdot \frac{1}{2} = 36 - 144 = -108 < 0$ , to u tački  $M_2(1, \frac{1}{2})$  funkcija ima lokalni minimum (jer je  $A = 6 > 0$ ) i on iznosi

$$z_{\min} = z\left(1, \frac{1}{2}\right) = 1 + 8 \cdot \frac{1}{8} - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

e)

$$\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} = 0 \wedge e^{\frac{x}{2}}2y = 0\right) \Leftrightarrow (x = -2 \wedge y = 0).$$

Dakle tačka  $(-2, 0)$  je jedina stacionarna tačka funkcije. Dalje imamo

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2+4), \\ z''_{xy} &= 2y\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = ye^{\frac{x}{2}}, \\ z''_{yy} &= 2e^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Sada je u tački  $(-2, 0)$ :

$$\Delta = 0 - \frac{1}{4}e^{-1}(-2+0+4) \cdot 2e^{-1} = -\frac{1}{e^2} < 0.$$

Znači, u tački  $(-2, 0)$  funkcija ima lokalni minimum ( $A > 0$ ) i on iznosi

$$z_{\min} = z(-2, 0) = e^{-1} \cdot (-2) = -\frac{2}{e}.$$

### Površ kao hodograf vektor funkcije dvehu realnih nezavisno promenljivih

**Vektor funkcije dvehu realnih nezavisno promenljivih.** Slično vektor funkciji jedne realne nezavisno promenljive, definiše se i vektor funkcija dvehu realnih nezavisno promenljivih. Preslikavanje  $\vec{r} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$  gde je  $X \subset \mathbb{R}^2$ , zove se vektor funkcija dvehu realnih nezavisno promenljivih. Ona uređenom paru  $(u, v) \in X$  dodeljuje vektor

$$\vec{r} = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k},$$

čije su koordinate  $x, y, z$  skalarne funkcije dvehu nezavisno promenljivih  $u$  i  $v$ . Vektor funkcija je potpuno određena ako su date funkcije  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  i  $z(u, v)$ , gde je  $(u, v) \in X \subset \mathbb{R}^2$ . Ove funkcije se nazivaju koordinatnim funkcijama vektor funkcije  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Izučavanje vektor funkcije je, ustvari, istovremeno izučavanje triju skalarne funkcija, upravo, njenih koordinatnih funkcija.

Skup tačaka u prostoru  $\mathbb{R}^3$  koje opisuje kraj vektora  $\vec{r}(u, v)$  čiji je početak  $O$  zove se hodograf vektor funkcije dvehu realnih nezavisno promenljivih. Tako je, na primer, grafik funkcije  $z = z(x, y)$  dvehu nezavisno promenljivih hodograf vektor funkcije

$$\vec{r}(x, y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z(x, y) \cdot \vec{k}.$$

( $X$  je domen funkcije  $z = z(x, y)$  i  $u = x, v = y$ .)

Pojmovi kao što su granična vrednost, neprekidnost, diferencijabilnost i drugi, razmatraju se analogno slučaju vektor funkcije jedne realne nezavisno promenljive.

**Definicija površi:** Površ je, po definiciji, hodograf bilo koje neprekidne vektor funkcije  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , definisane na nekoj oblasti  $D$ .

**Zadavanje površi.** Ako je površ  $\Gamma$  hodograf vektor funkcije  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , onda to obično ovako zapisujemo

$$\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

Sem ovako, kao hodograf vektor funkcije, površ se može zadati i parametarskim jednačinama:

$$\Gamma : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

pri čemu su  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  koordinatne funkcije vektor funkcije čiji hodograf je površ  $\Gamma$ .

Specijalno, ako parametarske jednačine površi  $\Gamma$  imaju oblik

$$\Gamma : x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

tada se površ  $\Gamma$  može zadati jednačinom rešenom po  $z$ :

$$\Gamma : z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

( $D$  – domen funkcije  $f(x, y)$ ). Potpuno analogno, u nekim slučajevima se površ može zadati jednačinom rešenom po  $x$ , odnosno jednačinom rešenom po  $y$ .

Ako sve tačke  $M(x, y, z)$  površi  $\Gamma$  zadovoljavaju jednačinu  $F(x, y, z) = 0$ , za neku funkciju  $F(x, y, z)$  triju nezavisno promenljivih definisanu u nekoj oblasti  $G$ , i ako svaka tačka koja tu jednačinu zadovoljava pripada površi  $\Gamma$ , tada površ  $\Gamma$  može da se zada tom jednačinom:

$$\Gamma : F(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in G.$$

**Proste površi.** Površ  $\Gamma$  koja je hodograf vektor funkcije  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , nazive se prostom ako za svaku tačku  $M \in \Gamma$  jednakost  $\vec{OM} = \vec{r}(u, v)$  važi za tačno jednu tačku  $(u, v)$  oblasti  $D$ .

Ako za tačku  $M_0$  na površi  $\Gamma$  postoji neka njena okolina takva da je deo površi  $\Gamma$  koji leži u toj okolini prosta površ, onda se ta tačka  $M_0$  naziva jednostrukom tačkom površi  $\Gamma$ .

**Glatke površi.** Neka je površ  $\Gamma$  zadata kao hodograf vektor funkcije:

$$\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

i neka je  $M_0$  tačka na površi  $\Gamma$  takva da je  $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(u_0, v_0)$  za neku tačku  $(u_0, v_0) \in D$ . Kaže se da je površ  $\Gamma$  glatka u tački  $M_0$  ako postoje parcijalni izvodi  $\vec{r}'_u(u, v)$  i  $\vec{r}'_v(u, v)$  u nekoj okolini tačke  $(u_0, v_0)$  i neprekidni su u toj tački, i ako je pritom  $\vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0) \neq 0$ . Ako je površ glatka u svakoj svojoj tački, kaže se da je ona glatka.

Specijalno, u slučaju kad je površ  $\Gamma$  zadata jednačinom  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , malopredjašnji uslov glatkosti površi u datoj tački glasi: funkcija  $f(x, y)$  je neprekidno diferencijabilna u tački  $(x_0, y_0)$  (pri čemu je  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \Gamma$  tačka u kojoj se definiše glatkost površi  $\Gamma$ ).

Ako je površ  $\Gamma$  zadata implicitnom jednačinom  $F(x, y, z) = 0$ ,  $(x, y, z) \in G$ , i ako je  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  tačka na površi  $\Gamma$  takva da je funkcija  $F(x, y, z)$  neprekidno diferencijabilna u toj tački i bar jedan od parcijalnih izvoda  $F'_x(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F'_y(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F'_z(x_0, y_0, z_0)$  je različit od nule, tada postoji okolina tačke  $M_0$  takva da je deo površi  $\Gamma$  koji u njoj leži glatka površ. (Bez dokaza.)

### Tangentna ravan i normala površi

**Definicija tangentne ravni:** Neka je  $M_0$  jedna tačka na površi  $\Gamma$  i  $\Pi$  jedna ravan. Kaže se da je  $\Pi$  tangentna ravan površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$  ako količnik rastojanja proizvoljne tačke  $M \in \Gamma$  od ravni  $\Pi$  i rastojanja  $M$  od tačke  $M_0$  teži nuli kad  $M$  teži  $M_0$  ostajući na  $\Gamma$ :

$$\lim_{\Gamma \ni M \rightarrow M_0} \frac{d(M, \Pi)}{d(M, M_0)} = 0.$$

(Kažemo da tačka  $M$  teži tački  $M_0$  ako rastojanje  $d(M, M_0)$  teži nuli.)

**Definicija normale:** Prava koja prolazi kroz tačku  $M_0$  na površi  $\Gamma$  i normalna je na tangentnu ravan te površi u tački  $M_0$  zove se normala površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$ .

Svaki ne-nula vektor ortogonalan na tangentnu ravan površi  $\Gamma$  u tački  $M_0 \in \Gamma$  naziva se vektorom normale površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$ .

**Teorema o egzistenciji i odredjivanju tangentne ravni:** Ako je tačka  $M_0$  površi  $\Gamma$  jednostruka i površ  $\Gamma$  je glatka u tački  $M_0$ , tada postoji, i to jedinstvena, tangentna ravan površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$ . Ako je pritom  $\Gamma$  hodograf vektor funkcije  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , i  $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(u_0, v_0)$

$((u_0, v_0) \in D)$ , tada je vektor  $\vec{N} = \vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0)$  jedan vektor normale površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$ . (Bez dokaza.)

**Nalaženje vektora normale površi.** Ako je poznat vektor normale površi  $\Gamma$  u tački  $M_0 \in \Gamma$ , onda se lako mogu napisati jednačina tangentne ravni i jednačine normale površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$ . Postupak nalaženja jednog vektora  $\vec{N}$  normale površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$  u slučaju kad je površ zadata kao hodograf vektor funkcije  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , i  $\vec{OM}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$   $((u_0, v_0) \in D)$  sadržan je u teoremi o egzistenciji i određivanju tangentne ravni:  $\vec{N} = \vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0)$ .

U slučaju kad je površ  $\Gamma$  zadata jednačinom  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , i  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \Gamma$  (pod pretpostavkom da je funkcija  $f(x, y)$  neprekidno diferencijabilna u tački  $(x_0, y_0)$ ), jedan vektor  $\vec{N}$  normale površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$  može se naći na sledeći način:  $\vec{N} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$ . (Ovo se lako dobija neposredno iz postupka nalaženja vektora normale površi u slučaju kad je površ zadata kao hodograf vektor funkcije.)

Neka je sada površ  $\Gamma$  zadata implicitnom jednačinom  $F(x, y, z) = 0$ ,  $(x, y, z) \in G$ , neka je  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ , neka je funkcija  $F(x, y, z)$  neprekidno diferencijabilna u tački  $(x_0, y_0, z_0)$  i neka je  $F'_x(x_0, y_0, z_0)^2 + F'_y(x_0, y_0, z_0)^2 + F'_z(x_0, y_0, z_0)^2 \neq 0$ . Tada je vektor

$$\vec{N} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$$

jedan vektor normale površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$ .

Ovo se može pokazati na sledeći način, ako se primeni teorema o egzistenciji implicitno zadate funkcije. Prema toj teoremi, ako je, na primer,  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , onda postoji okolina  $V$  tačke  $M_0$  u kojoj se jednačina  $F(x, y, z) = 0$  može jednoznačno rešiti po  $z$ . Tako se dolazi do funkcije  $z = f(x, y)$ , definisane i neprekidno diferencijabilne u nekoj okolini  $D$  tačke  $(x_0, y_0)$ , i takve da je  $f(x_0, y_0) = z_0$ . Deo površi  $\Gamma$  koji leži u  $V$  je površ  $\Gamma_1$  koja se može zadati jednačinom  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ . Pritom je  $M_0 \in \Gamma_1$ . Jedan vektor normale površi  $\Gamma_1$  (a i površi  $\Gamma$ ) u tački  $M_0$  je vektor  $\vec{N}_1 = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$ . Kako je

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

to je i vektor

$$\begin{aligned} \vec{N} &= F'_z(x_0, y_0, z_0) \vec{N}_1 = \\ &= (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)) \end{aligned}$$

jedan vektor normale površi  $\Gamma$  u tački  $M_0$ .

**Primer 2.** Napišimo jednačinu tangentne ravni i jednačine normale površi  $z = x^2 + y^2$  u tački  $M_0(1, 1, z_0)$ .

**Rešenje.** Imamo  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , tako da je  $z_0 = f(1, 1) = 2$  i  $f'_x(1, 1) = 2$ ,  $f'_y(1, 1) = 2$ . Jednačina tražene tangentne ravni glasi

$$-2(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 2) = 0,$$

tj.,  $2x + 2y - z - 2 = 0$ , a jednačine normale su

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{-1}.$$